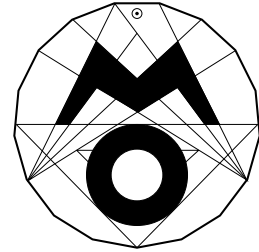


49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 5
Aufgaben



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

490511

Im Fußballverein „Schnelle Wade“ trainieren insgesamt 72 Kinder, wobei es genau dreimal so viele Jungen wie Mädchen sind. Timo (Trikotnummer 8) und Richard (Trikotnummer 5) vergleichen die Anzahl der Tore, die sie in der letzten Saison bei Turnieren geschossen haben. Hätte Timo drei Tore mehr geschossen, wären es genau viermal so viele wie die Anzahl von Richards Treffern gewesen. Zusammen haben sie 22 Tore geschossen.

- a) Wie viele Jungen und wie viele Mädchen trainieren in dem Verein?
- b) Wie oft trafen Timo und Richard jeweils das Tor?

Weise jeweils durch eine Probe nach, dass die von dir ermittelten Zahlen alle Bedingungen erfüllen.

Zum heutigen Training haben sich schon fünf Jungen, Torwart Sven (Trikotnummer 1), Pascal (Trikotnummer 2) und Denny (Trikotnummer 3) und natürlich Richard und Timo in der Reihenfolge ihrer Trikotnummern an der Mittellinie aufgestellt. Fiona, die Supermathematikerin, kommt angerannt, bleibt stehen und meint: „Eure Trikotnummern ergeben ja eine interessante Zahlenfolge. Wenn Valentin kommt, setzt er die Reihe fort.“

- c) Welche Trikotnummer hat Valentin?

490512

In dieser Aufgabe geht es um Kreise und Geraden, die einander schneiden oder auch nur berühren.

- a) Wir beginnen mit einem Kreis und zwei Geraden. Die Geraden sollen vier Schnittpunkte mit dem Kreis haben. Fertige je eine Zeichnung für folgende drei Fälle an:
 - Die Geraden schneiden einander nicht.
 - Die Geraden schneiden einander außerhalb des Kreises.
 - Die Geraden schneiden einander innerhalb des Kreises.
- b) Zeichne zwei parallele Geraden. Zeichne einen Kreis so, dass er die eine Parallele berührt und die andere zweimal schneidet. Zeichne nun einen zweiten Kreis in deine Zeichnung, der beide Parallelen berührt. Wo befindet sich der Mittelpunkt deines zweiten Kreises?
- c) Zeichne zwei Kreise, die einander in zwei Punkten schneiden. Nun zeichnest du die Gerade durch die beiden Schnittpunkte; dann wählst du dir einen der beiden Schnittpunkte und zeichnest die senkrechte Gerade zu der ersten Gerade durch diesen Schnittpunkt. Wie viele Schnittpunkte hat diese zweite Gerade mit den Kreisen?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

490513

Fünf Jungs gründen eine Band „Die lauten Mathematiker“. Der Name ist entstanden, weil alle an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und die ersten fünf Plätze belegt haben.

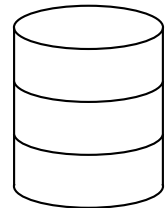
Die Jungen spielen Schlagzeug, Saxophon, Keyboard und Gitarre. Paul singt dazu.

- (1) Für Stefan haben sich die Keyboardstunden gelohnt.
 - (2) Paul war traurig, dass er nicht Erster wurde.
 - (3) Nils ist nicht Erster, aber auch nicht Vierter geworden. Er spielt Schlagzeug.
 - (4) Timo ist Zweiter geworden, er spielt keine Gitarre.
 - (5) Guido freut sich auch über seinen fünften Platz.
- a) Welche Plätze haben die Jungen jeweils bei der Mathematik-Olympiade belegt?
b) Wer hat in der Band welche Aufgabe?

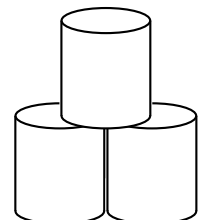
490514

Annabella feiert nächsten Monat ihren Geburtstag und hat über viele Wochen gleich große leere Konservendosen gesammelt. Die Dosen sind oben offen und haben keine Beschriftung mehr.

Damit die Dosen etwas schöner aussehen, möchte Annabella drei Streifen auf die Dosen malen und zwar so, dass der Boden und der daran grenzende unterste Streifen nicht die gleiche Farbe haben und nebeneinander liegende Streifen auch nicht. Natürlich sollen alle Streifen und auch der Boden bemalt werden.




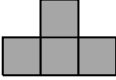
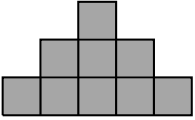
- a) Annabella findet zu Hause nur die Farben Rot und Blau.
Wie viele Dosen könnte sie unterschiedlich bemalen?
- b) Annabellas Mutter findet noch einen Topf mit gelber Farbe.
Wie viele Dosen kann sie nun unterschiedlich bemalen, wobei aber nicht immer alle drei Farben verwendet werden müssen?
- c) Bisher sind alle Dosen zwei- oder dreifarbig. Der Nachbar bringt noch die Farbe grün vorbei, und Annabella kann weitere Dosen, und zwar immer vierfarbig, anmalen.
Wie viele neue Dosen kann sie so bemalen? Versuche, die Lösung durch eine Rechnung zu finden und nicht zu zeichnen.
- d) Annabella ist nun fertig und hat eine ganze Menge Dosen bemalt. Sie möchte aus ihnen eine achtstufige Pyramide aus lauter verschiedenen Dosen aufbauen. (Im nebenstehenden Bild ist eine zweistufige Pyramide dargestellt.)
Reichen ihre Dosen, um diese Pyramide aufzubauen?




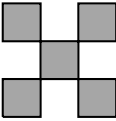
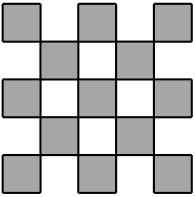
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- a) Durch die Muster *A* und *B* wird jeweils eine Zahlenfolge beschrieben, wenn man die Anzahl der kleinen Quadrate zählt. Setze die Zahlenfolgen bis zur 10. Zahl fort, ohne die Muster zu zeichnen.
 Versuche bei Muster *A*, eine Methode zu finden, mit der du leicht z. B. die 21. Zahl oder die 77. Zahl berechnen kannst.

Muster A:


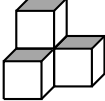
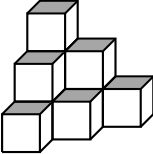
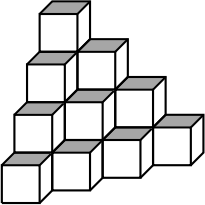
	1. Stufe	2. Stufe	3. Stufe
			
Zahlenfolge	1;	4;	9;

Muster B:

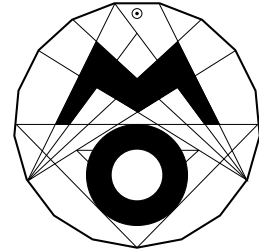
	1. Stufe	2. Stufe	3. Stufe
			
Zahlenfolge	1;	5;	13;

- b) Durch die „Würfelmauer“ (Muster *C*) wird ebenfalls eine Zahlenfolge beschrieben, wenn man die Anzahl der Würfel zählt. Schreibe die Folge bis zur 10. Zahl auf.

Muster C:

1. Stufe	2. Stufe	3. Stufe	4. Stufe
			

49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 6
Aufgaben



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

490611

In dieser Aufgabe geht es um Kreise und Geraden, die einander schneiden oder auch nur berühren.

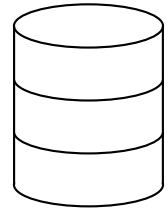
- a) Wir beginnen mit einem Kreis und zwei Geraden. Die Geraden sollen vier Schnittpunkte mit dem Kreis haben.
Fertige je eine Zeichnung für folgende drei Fälle an:
- Die Geraden schneiden einander nicht.
 - Die Geraden schneiden einander außerhalb des Kreises.
 - Die Geraden schneiden einander innerhalb des Kreises.
- b) Zeichne zwei parallele Geraden.
Zeichne einen Kreis so, dass er die eine Parallele berührt und die andere zweimal schneidet.
Zeichne nun einen zweiten Kreis in deine Zeichnung, der beide Parallelen berührt. Wo befindet sich der Mittelpunkt deines zweiten Kreises?
- c) Zeichne zwei Kreise, die einander in zwei Punkten schneiden.
Nun zeichnest du die Gerade durch die beiden Schnittpunkte; dann wählst du dir einen der beiden Schnittpunkte und zeichnest die senkrechte Gerade zu der ersten Gerade durch diesen Schnittpunkt.
Wie viele Schnittpunkte hat diese zweite Gerade mit den Kreisen?
- d) Zeichne zwei Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt. Der Radius des größeren soll doppelt so groß sein wie der Radius des kleineren Kreises. Zeichne dann ein Dreieck, dessen Eckpunkte auf dem großen Kreis liegen und dessen Seiten den kleinen Kreis berühren.
Was für ein Dreieck entsteht?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

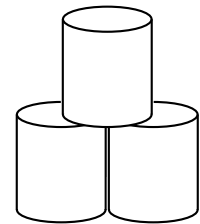
490612

Annabella feiert nächsten Monat ihren Geburtstag und hat über viele Wochen gleich große leere Konservendosen gesammelt. Die Dosen sind oben offen und haben keine Beschriftung mehr.

Damit die Dosen etwas schöner aussehen, möchte Annabella drei Streifen auf die Dosen malen und zwar so, dass der Boden und der daran grenzende unterste Streifen nicht die gleiche Farbe haben und nebeneinander liegende Streifen auch nicht. Natürlich sollen alle Streifen und auch der Boden bemalt werden.



- Annabella findet zu Hause nur die Farben Rot und Blau. Wie viele Dosen könnte sie unterschiedlich bemalen?
- Annabellas Mutter findet noch einen Topf mit gelber Farbe. Wie viele Dosen kann sie nun unterschiedlich bemalen, wobei aber nicht immer alle drei Farben verwendet werden müssen?
- Bisher sind alle Dosen zwei- oder dreifarbig. Der Nachbar bringt noch die Farbe grün vorbei, und Annabella kann weitere Dosen, und zwar immer vierfarbig, anmalen. Wie viele neue Dosen kann sie so bemalen? Die Lösung soll durch eine Rechnung gefunden werden.
- Annabella ist nun fertig und hat eine ganze Menge Dosen bemalt. Als sie ihre Dosen betrachtet, stellt sie fest: „Oh, jede Dose sieht anders aus, aber es gibt zweifarbige, dreifarbige und vierfarbige Dosen.“
Wie viele zweifarbige Dosen gibt es? Wie viele sind dreifarbig? Und wie viele vierfarbig?
- Annabella möchte aus ihren Dosen eine neunstufige Pyramide aufbauen. (Im nebenstehenden Bild ist eine zweistufige Pyramide dargestellt.)
Reicht die Anzahl ihrer Dosen, um diese Pyramide aufzubauen?



490613

Stelle dir Folgendes vor:

Du bist in einem Königreich der Minister, der für das Geld zuständig ist. Die Währung heißt Sol (Mehrzahl Soles, Zeichen S), und es gibt nur ganzzahlige Beträge.

An einem schönen Morgen lässt dich der König rufen und sagt: „Ich will in meinem Reich neue Münzen einführen. Da ich sparsam bin, werden wir nur Münzen zu 1 Sol, zu 3 Soles und zu 9 Soles prägen.“

Der König sprach's, du führtest's aus: Es gibt also nur Münzen für 1 S , für 3 S und für 9 S .

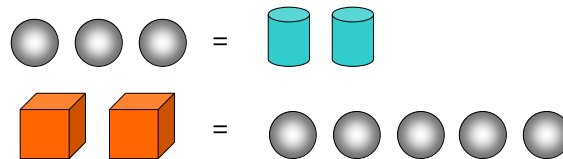
- Wie viele Münzen braucht man mindestens, um einen Preis von 17 S zu bezahlen? Und wie viele für einen Preis von 21 S ?
- Dein Diener soll auf den Markt gehen und neun verschiedene Dinge kaufen, die jeweils unterschiedlich viel kosten, und zwar alle möglichen Preise von 1 S bis 9 S . Jeder Händler auf dem Markt gibt das Wechselgeld mit der kleinstmöglichen Münzenzahl zurück. Du gibst deinem Diener fünf 9- S -Münzen mit und sagst ihm, er solle von höchstens vier Händlern Wechselgeld annehmen. Zeige, dass er unter diesen Bedingungen die neun Dinge kaufen kann.
Wie viele Münzen der drei Sorten hättest du deinem Diener mitgeben müssen, wenn kein Händler Wechselgeld zurückgeben würde?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- c) Die Händler geben wieder Wechselgeld, und du schickst den Diener wieder los. Er soll wieder neun verschiedene Dinge mit jeweils unterschiedlichem Preis kaufen, aber diesmal von 2 ₰ bis 10 ₰ , und dabei nicht häufiger als viermal Wechselgeld annehmen. Der Diener erhält von dir also sechs 9- ₰ -Münzen. Kann er deinen Auftrag erfüllen?
- d) Dein Diener findet diese Aufgabe zu einfach. „Herr,“ sagt er, „ich möchte 16 verschiedene Dinge von 1 ₰ bis 16 ₰ einkaufen. Ihr gebt mir die kleinstmögliche Zahl Münzen für den Gesamtpreis mit, und ich versuche, unter den Bedingungen auf dem Markt alles zu bekommen.“
- Wie viele – und welche – Münzen musst du dem Diener mitgeben? Kann er seine Aufgabe lösen?

490614

Gezeichnete Gleichungen:



Drei Kugeln sind so schwer wie zwei Zylinder. Zwei Würfel sind so schwer wie fünf Kugeln. Wie viele Zylinder sind so schwer wie drei Würfel?

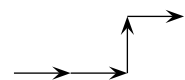
490615

Wenn man einen Roboter (oder einen Zeichenstift) auf einem quadratischen Kästchengitter bewegen will, so kann man dies durch eine Folge von drei Grundkommandos machen:

- G – ändere deine Richtung nicht und gehe eine Kantenlänge.
- L – drehe dich nach links um 90° und gehe eine Kantenlänge.
- R – drehe dich nach rechts um 90° und gehe eine Kantenlänge.

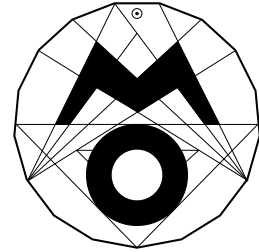
Grundsätzlich soll am Anfang der Roboter mit „dem Gesicht nach rechts“ stehen. Wenn er also von dort nach oben laufen soll, lautet das erste Kommando „L“, wenn er von dort nach rechts laufen soll, lautet das erste Kommando „G“, wenn er vom Anfang nach unten laufen soll, lautet das erste Kommando „R“.

Beispiel: Zu der nebenstehenden Figur gehört die Kommandofolge GGLR.



- a) Gib eine Kommandofolge an, die den Roboter *insgesamt* um 4 Schritte nach rechts und drei Schritte nach oben führt und aus 9 Grundkommandos besteht. Zeichne die zugehörige Figur.
- b) Gib eine Kommandofolge mit kleinstmöglicher Länge an, die ein Quadrat mit der Kantenlänge 3 erzeugt und bei einem zweiten Durchlauf wiederum dieses Quadrat malt.
- c) Wir geben eine Kommandofolge vor: (1) LLRRRLLLL
Zeichne auf kariertem Papier die Figur, die entsteht, wenn die Kommandofolge viermal hintereinander durchgeführt wird.
- d) Ändere das erste Kommando von (1) aus Teil c) in R. Welche Figur entsteht jetzt, wenn du mehrere Durchläufe machst? Nach wie vielen Durchläufen könnte der Roboter aufhören, weil sich die Figur wiederholt?
- e) Ändere das erste Kommando von (1) aus Teil c) in G. Welche Figur entsteht jetzt, wenn du mehrere Durchläufe machst? Erreicht der Roboter immer noch seinen Ausgangspunkt und würde die Figur noch einmal zeichnen?

49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 7
Aufgaben



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

490711

Die Firma HAUSBAU soll mit Baggern 10 gleich große Gruben für Fundamente von Einfamilienhäusern ausheben. Sie sollen in 7 Tagen fertig sein. Dazu müssen 8 Arbeiter täglich 8 Stunden arbeiten.

Eine Grube wird vor Beginn der Arbeit abbestellt. Ein Arbeiter wird am Ende des 4. Tages krank, ein weiterer am Ende des 6. Tages. Beide fallen bis zum Ende der Bauarbeiten aus.

Können die 9 Gruben in den 7 Tagen ausgehoben werden, ohne dass Überstunden gemacht werden müssen?

490712

Die unten stehende Figur besteht aus gleich großen Quadraten, in die jeweils eine Zahl eingetragen ist. Diese Figur soll in vier Teilfiguren zerlegt werden, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

- (1) Die Teilfiguren sind form- und flächeninhaltsgleich (also in diesem Sinne kongruent).
- (2) Addiert man die in den Quadraten einer jeden Teilfigur eingetragenen Zahlen, dann sind diese Summen gleich.

Gib eine Zerlegung an, welche die genannten Bedingungen erfüllt.

	12	14	13			
5	8	11	3	2	7	17
15	10	9	3	18	19	6
			4	16	8	

Abbildung A 490712

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

490713

Über ein Dreieck ABC ist bekannt:

- (1) Die Größe des Winkels BAC beträgt 60° .
- (2) Die Halbierende des Winkels ACB schneidet die Seite \overline{AB} so in einem Punkt D , dass die Strecken \overline{CD} und \overline{BD} gleich lang sind.

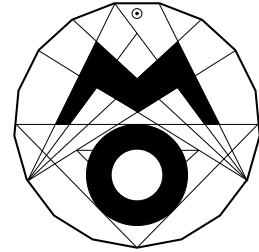
Zeichne eine Planfigur und leite aus den Voraussetzungen die Größen der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks her.

490714

Die 1. Stufe der 49. Mathematik-Olympiade findet im Jahr 2009 statt. Jens behauptet: „Man kann die Jahreszahl 2009 so in zwei Summanden zerlegen, dass deren größter gemeinsamer Teiler die Zahl 49 ist.“ Als Beispiel für seine Behauptung gibt er 931 und 1078 mit der Summe 2009 und dem größten gemeinsamen Teiler 49 an.

- a) Überprüfe die Behauptung von Jens.
- b) Ermittle die Anzahl aller geordneten Paare $(a; b)$ aus positiven ganzen Zahlen mit der Summe $a + b = 2009$ und dem größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(a; b) = 49$.
- c) Weise nach, dass es kein Zahlenpaar $(a; b)$ gibt, für das $a + b = 2010$ und $\text{ggT}(a; b) = 50$ gilt.
- d) In welchem Jahr findet die nächste 1. Stufe der Mathematik-Olympiade statt, zu der es wieder mindestens ein geordnetes Paar $(a; b)$ von positiven ganzen Zahlen a und b derart gibt, dass die Jahreszahl die Summe von a und b ist und deren größter gemeinsamer Teiler $\text{ggT}(a; b)$ die Nummer der Olympiade ist?
Ermittle die Anzahl dieser geordneten Paare $(a; b)$.

49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 8
Aufgaben



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

490811

Ein Gutsbesitzer musste wegen Futtermangels 50 Schafe verkaufen, da sonst sein Vorrat anstatt für 10 Wochen nur für 9 Wochen gereicht hätte.

Wie viele Schafe hatte der Gutsbesitzer vor dem Verkauf der 50 Schafe?

490812

Alle Zahlen, die in dieser Aufgabe ermittelt werden sollen, sind positiv und ganz.

- a) Ermittle alle dreistelligen Zahlen z , welche die drei Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen.
- (1) Die Zahl z hat die Quersumme 14.
 - (2) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer.
 - (3) Vertauscht man die Einerziffer und die Hunderterziffer, so ist z um 198 kleiner als die Zahl, die man durch diesen Tausch erhält.
- b) Ermittle alle vierstelligen Zahlen n , welche die folgenden vier Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erfüllen.
- (1) Die Zahl n besteht aus vier von Null verschiedenen Ziffern. Dabei tritt jede Ziffer höchstens einmal auf.
 - (2) Die Zahl n hat die Quersumme 18.
 - (3) Die Tausenderziffer von n ist um 1 kleiner als die Einerziffer.
 - (4) Schreibt man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge auf, dann ist die so entstehende Zahl um 729 größer als n .

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

490813

Wir betrachten ein Rechteck $ABCD$ mit dem Diagonalschnittpunkt S . Im Punkt A ist die Senkrechte auf die Gerade AC errichtet. Diese schneidet die Verlängerung der Diagonalen \overline{BD} im Punkt E . Außerdem gilt:

- (1) Die Diagonale \overline{AC} ist 80 mm lang.
 - (2) Die Größe des Winkels BAC beträgt 30° .
- a) Fertige eine Zeichnung der Figur an, die alle Voraussetzungen erfüllt, und ermittle durch Messung die Länge der Strecke \overline{DE} .
- b) Ermittle die Länge der Strecke \overline{DE} durch Rechnung. Begründe deinen Rechenweg.

490814

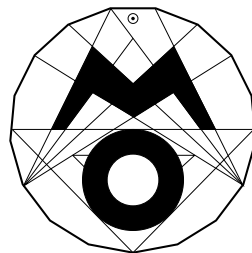
Betrachtet werden regelmäßige n -Ecke. Dabei heißt ein n -Eck regelmäßig, wenn alle Seiten des n -Ecks dieselbe Länge haben und alle Innenwinkel gleich groß sind.

Je zwei verschiedene Eckpunkte sind durch eine Strecke verbunden. Zueinander parallele Verbindungsstrecken werden als äquivalent bezeichnet und zu Mengen zusammengefasst. Diese Mengen von zueinander parallelen Verbindungsstrecken werden Äquivalenzklassen genannt.

- a) Bearbeite folgende Aufgaben für $n = 5$, $n = 7$ und $n = 8$:
Skizziere ein regelmäßiges n -Eck mit allen Verbindungsstrecken.
Wie viele Verbindungsstrecken erhält man? Zeichne zueinander parallele Verbindungsstrecken jeweils mit der gleichen Farbe.
Ermittle die Anzahl der Äquivalenzklassen paralleler Verbindungsstrecken.
- b) Äußere eine Vermutung für eine Regel, welche die Anzahl der Äquivalenzklassen paralleler Verbindungsstrecken für jedes regelmäßige n -Eck angibt.
Überprüfe diese Vermutung für $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$ und $n = 9$.

Hinweis: Die Parallelität der Verbindungsstrecken kann ohne Beweis verwendet werden.

49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9–10
Aufgaben



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweise: 1. *Es stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491011

Tina und Toni berechnen das Ergebnis einer Aufgabe mit verschiedenen Taschenrechnern. Tina erhält 3,9999999, während Tonis Rechner die Zahl 4 anzeigt. Schnell sind sie sich einig, dass bei Benutzung eines Taschenrechners Rundungsfehler eine Rolle spielen können. Vielleicht stimmt eines der Ergebnisse, vielleicht liegt das richtige Resultat auch dazwischen.

Entscheiden Sie unter Verwendung von Umformungsregeln, welche der folgenden Rechenterme eine natürliche Zahl darstellen.

a) $(\sqrt{18} + \sqrt{8})^2$

b) $(\sqrt{2} + 1)^2$

c) $(\sqrt{2} + 1)^{16}$

d) $\sqrt{(15 + \sqrt{104}) \cdot (15 - \sqrt{104})}$

491012

Finden Sie alle ganzen Zahlen n , für die $n^2 - 3$ ein ganzzahliges Vielfaches von $n + 3$ ist.

491013

Beweisen Sie:

- a) Wenn ein Dreieck gleichschenkelig ist, dann sind zwei seiner Höhen gleich lang.
- b) Wenn zwei Höhen eines Dreiecks gleich lang sind, dann ist das Dreieck gleichschenkelig.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

491014

Bis in die siebziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts war Schwarz-Weiß-Fernsehen noch recht verbreitet. Daher musste bei den Fußballtrikots der Bundesliga darauf geachtet werden, dass sie schon bezüglich der Helligkeit möglichst gut unterscheidbar waren. Die Helligkeit messen wir auf einer Skala von 0 (schwarz) bis 1 (weiß). Alle Helligkeitswerte zwischen 0 und 1 erschienen dem damaligen Fernsehzuschauer als dunkleres oder helleres Grau.

Man will nun 18 Mannschaften mit Trikots (Hemd/Hose) ausstatten. Das Hemd und die Hose einer Mannschaft sollen jeweils einfarbig sein, müssen aber nicht die gleiche Farbe haben. Die Farben sollen so gewählt werden, dass sich bei je zwei unterschiedlichen Trikots wenigstens Hemd oder Hose in der Helligkeit um einen möglichst hohen Wert unterscheiden.

Die kleinste aller Differenzen der Helligkeitswerte zweier benutzter Farben bezeichnen wir mit h .

Wie groß kann h höchstens gewählt werden?

491015

Gegeben ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse \overline{AB} der Länge $|AB| = 6$. Der Lotfußpunkt von C auf \overline{AB} sei D . Im Inneren von \overline{CD} wird ein beliebiger Punkt P gewählt. M sei der Mittelpunkt der Strecke \overline{PD} . Durch P und M werden Parallelen zur Geraden AB gelegt. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Dreiecksseiten \overline{AC} und \overline{BC} bilden ein Trapez.

Für welche Lage von P ist der Flächeninhalt dieses Trapezes am größten?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Eine Geheimzahl g soll durch einen Supervisor (Aufseher) an n Personen P_1, \dots, P_n verschlüsselt mitgeteilt werden, so dass gilt: Erst wenn eine bestimmte Mindestanzahl von Personen zusammenkommt, sollen sie in der Lage sein, die Geheimzahl g zu bestimmen.

- a) Die Geheimzahl g sei 2009, die Anzahl der Personen sei $n = 5$. Der Supervisor wählt eine lineare Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = 2x + 2009$ und die 5 paarweise verschiedenen reellen Zahlen $x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30, x_4 = 40, x_5 = 50$. Er teilt jeder Person P_i jeweils die Zahl x_i und den Funktionswert $y_i = f(x_i)$ mit, d.h. P_1 erhält die Zahl $x_1 = 10$ und den Wert $y_1 = 2029$, P_2 erhält $x_2 = 20$ und $y_2 = 2049$ u. s. w. Die konkrete Funktionsgleichung verrät der Supervisor nicht. Jedoch wissen alle Personen, dass eine lineare Funktion f gewählt wurde und dass die Geheimzahl g der Funktionswert von f an der Stelle Null ist.

Wie viele Personen müssen zusammenkommen, damit die Geheimzahl g von ihnen bestimmt werden kann? Und wie kann die Geheimzahl bestimmt werden?

- b) Wir betrachten nun den allgemeinen Fall mit n Personen P_1, \dots, P_n . Der Supervisor wählt eine quadratische Funktion und wieder n paarweise verschiedene reelle Zahlen x_1, \dots, x_n . Er teilt jeder Person P_i die Zahl x_i und den Funktionswert $y_i = f(x_i)$ mit. Die Personen wissen, dass eine quadratische Funktion der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + g$ mit $a \neq 0$ gewählt wurde, sie kennen jedoch nicht die konkreten Werte von a und b und erst recht nicht den von g .

Wie viele Personen müssen jetzt zusammenkommen, damit die Geheimzahl g von ihnen bestimmt werden kann und wie können sie die Geheimzahl bestimmen?

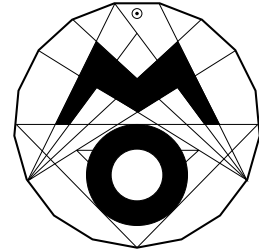
Überprüfen Sie zunächst Ihr Verfahren, indem Sie von den Zahlenpaaren

$$(x_i; y_i) \in \{(1; -1), (2; -3), (3; -1), (4; 5), (5; 15), (6; 29)\}$$

die benötigte Anzahl von Paaren auswählen und die durch sie festgelegte Geheimzahl g berechnen.

Weisen Sie dann allgemein nach, dass nach Ihrem Verfahren die Geheimzahl für jede quadratische Funktion eindeutig bestimmt werden kann.

49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11–13
Aufgaben



© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

491311

Man ermittle für jede reelle Zahl a alle reellen Zahlen x , die die Ungleichung

$$||x - 1| + x - 3| < a$$

erfüllen.

491312

Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre dessen Seiten \overline{AB} und \overline{AC} in E und F . Der Umkreis des Dreiecks BFE schneide die Gerade AC außer in F noch in M , und analog bezeichne N den von E verschiedenen Schnittpunkt des Umkreises von Dreieck CFE mit der Geraden AB . Man beweise, dass die Gerade MN den Inkreis des Dreiecks ABC berührt.

491313

Ulrike und Veit spielen mit Kieselsteinen. Dazu füllen sie zwei Schalen mit jeweils der gleichen Anzahl $n > 1$ von Kieselsteinen und wechseln sich in den Zügen ab. Ulrike beginnt.

Derjenige Spieler, der am Zug ist, leert eine beliebige Schale und teilt den Inhalt der anderen Schale auf beide so auf, dass keine Schale leer bleibt. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, hat verloren, und das Spiel ist beendet.

Man untersuche, ob Ulrike oder ob Veit die Möglichkeit hat, den Sieg zu erzwingen. Man gebe eine Spielweise an, mit der dies möglich ist.

491314

In den Mittelpunkten der Seitenflächen eines Würfels mit der Kantenlänge a werden nach außen weisende senkrechte Strecken der Länge h errichtet. Die sechs nicht auf der Oberfläche des Würfels liegenden Endpunkte dieser Strecken bilden die Ecken eines durch acht gleichseitige Dreiecke begrenzten Körpers, eines sogenannten Oktaeders.

- a) Wie groß ist h , wenn das Oktaeder die Kantenlänge $2a$ hat?
- b) Man untersuche, ob in diesem Fall der Würfel ganz im Inneren des Oktaeders liegt.